# KETIDAKSAMAAN PADA FUNGSI *Q*-GAMMA

**Baiduri**[1]

[1]Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Jurusan Matematika, Universitas Muhammadiyah Malang
Alamat Korespondensi: Perum Pondok Bestari Indah Blok C6/298 Landungsari Dau Malang
Telpon: 0341-465167, Hp:08123582957

## ABSTRAK

Alsina and Tomas (2005) discuss about inequaty of the gamma function by geometrical approach. Sandor (2005) and Baiduri (2008) discuss about some inequalities that involves the gamma function based on the series representaion of psi function. Based on these results and use same method, this paper discusses some inequalities involves the *q*-gamma function.

Key words: Gamma function, Psi function, q-Gama function.

## PENDAHULUAN

Fungsi gamma Euler $\Gamma(x)$ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \text{ , untuk } x > 0$$

Fungsi psi $\psi(x)$ didefinisikan sebagai derivatif logaritma fungsi gamma. Secara matematika

$\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ Dalam bentuk deret

$$\psi(x) = -\gamma + (x-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(x+k)}, \quad x > 0.$$

Banyak peneliti yang membahas tentang ketidaksamaan yang melibatkan fungsi gamma dan kemonotonan fungsi gamma. Koldobsky dan Lifshits (2000), mengkaji ketidaksamaan fungsi gamma, Baiduri (2003) membahas kemonotonan fungsi gamma yang didasarkan pada representasi integral $\ln \Gamma(x+1)$, dan Baiduri (2008) mengkaji ketidaksamaan fungsi gamma berdasarkan representasi deret dari fungsi psi. Alsina dan Tomas (2005) mengkaji ketidaksamaan fungsi gamma secara geometri,. bahwa untuk semua $x \in [0,1]$ dan untuk bilangan bulat yang tidak negative *n*, berlaku

$$\frac{1}{n!} \le \frac{\Gamma(1+x)^n}{\Gamma(1+nx)} \le 1 \qquad (1.1)$$

Generalisasi hasil ini dibahas oleh Sandor (2005)

$$\frac{1}{\Gamma(1+a)} \le \frac{\Gamma(1+x)^a}{\Gamma(1+ax)} \le 1 \text{ , } x \in [0,1], \quad a \ge 1 \qquad (1.2)$$

Baiduri (2008) memperoleh bentuk lain dari (1.2), yaitu

Untuk $a \in [0,1]$ dan $x \in [0,1]$ maka

$$\frac{1}{\Gamma(1+a)} \ge \frac{\Gamma(1+x)^a}{\Gamma(1+ax)} \qquad (1.3)$$

Untuk $a \in [0,1]$ dan $x \ge 1$ maka

$$\frac{1}{\Gamma(1+a)} \le \frac{\Gamma(1+x)^a}{\Gamma(1+ax)} \qquad (1.4)$$

Pada tulisan ini dibahas tentang ketidaksamaan pada fungsi *q*-gamma dengan menggunakan teknik yang dilakukan oleh Sandor.

Fungsi *q*-gamma, $\Gamma_q(x)$ dengan $0 < q < 1$ didefinisikan oleh

$$\Gamma_q(x) = (1-q)^{1-x}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-q^i}{1-q^{x+i}}$$

$$\Gamma_q(1) = \Gamma_q(2) = 1, \quad 0 < q < 1$$

Sedangkan fungsi *q*-psi,

$$\psi_q(x) = \frac{\Gamma_q^1(x)}{\Gamma_q(x)}$$

$$= -\ln(1-q) + \ln q \sum_{i=0}^{\infty}\frac{q^{x+i}}{1-q^{x+i}}$$



Beberapa sifat dari fungsi *q*-gamma sudah dibahas oleh Askey (1978/79). Dalam tulisan ini akan dikembangkan ketidaksamaan (1.1) dan (1.2) pada $\Gamma_q(x)$ dengan menggunakan fakta bahwa $\lim_{q \to 1}\Gamma_q(x) = \Gamma(x)$ dan $\lim_{q \to 1}\Psi_q(x) = \Psi(x)$

## HASIL DAN PEMBAHASAN

***Lemma 2.1***

Jika $0 < q < 1,\ a \ge 1$ dan $x \in [0,1]$ maka $\Psi_q(1+ax) \ge \Psi_q(1+x)$

Bukti :

$$\Gamma_q(1+x) = (1-q)^{1-(1+x)}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-q^i}{1-q^{1+x+i}}$$

$$= (1-q)^{-x}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-q^i}{1-q^{1+x+i}}$$

$$\Psi_q(1+x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma_q(1+x)$$

$$= -\ln(1-q) + \ln q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{1+x+n}}{1-q^{1+x+n}}$$

$$\Gamma_q(1+ax) = (1-q)^{1-(1+ax)}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-q^i}{1-q^{1+ax+i}}$$

$$= (1-q)^{-ax}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-q^i}{1-q^{1+ax+i}}$$

$$\Psi_q(1+ax) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma_q(1+ax)$$

$$= -a\ln(1-q) + a\ln q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{1+ax+n}}{1-q^{1+ax+n}}$$

$$\Psi_q(1+ax) - \Psi_q(1+x) =$$

$$\left(-a\ln(1-q) + a\ln q\sum\frac{q^{1+ax+n}}{1-q^{1+ax+n}}\right) -$$

$$\left(-\ln(1-q) + \ln q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{1+x+n}}{1-q^{1+x+n}}\right)$$

$$= (-a+1)\ln(1-q) + \ln q\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{aq^{1+ax+n}}{1-q^{1+ax+n}} - \frac{q^{1+x+n}}{1-q^{1+x+n}}\right)$$

$$= (-a+1)\ln(1-q) + \ln q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{aq^{1+ax+n} - q^{1+x+n}}{(1-q^{1+ax+n})(1-q^{1+x+n})}$$

Karena $x \ge 0,\ a \ge 1,\ 0 < q < 1,\ 1 + ax + n \ge 1 + x + n$ maka $(-a+1) \le 0,\ \ln(1-q) < 0,\ \ln q < 0$ dan $q^{1+ax+n} \le q^{1+x+n}$
Sehingga

$$\Psi_q(1+ax) - \Psi_q(1+x) \ge 0 \text{ maka } \Psi_q(1+ax) \ge \Psi_q(1+x)$$

Jika $0 < q < 1,\ x \ge 0$ dan $a \ge 1$ maka fungsi $f(x) = \dfrac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)}$ = merupakan fungsi turun.

Bukti :

$$= \ln\frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)}$$

$$g(x) = \ln\Gamma_q(1+x)^a - \ln\Gamma_q(1+ax)$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = a\frac{d}{dx}\Gamma_q(1+x) - a\frac{d}{dx}\Gamma_q(1+ax)$$

$$= a\left[\Psi_q(1+x) - \Psi_q(1+ax)\right]$$

Dari Lemma 2.1, maka

$$\frac{dg(x)}{dx} = a\left[\Psi_q(1+x) - \Psi_q(1+ax)\right] \le 0$$

Jadi $f(x) = \dfrac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)}$ = merupakan fungsi turun.

**Teorema 2.3**

Jika $0 < q < 1,\ a \ge 1$ dan $x \in [0,1]$, maka

$$\frac{1}{\Gamma_q(1+a)} \le \frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)} \le 1 \qquad (2.1)$$

**Bukti:**

Dari teorema 2.2, $f(x) = \dfrac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)}$ maka adalah fungsi turun pada $x \in [0,1]$, maka

$$f(1) \le f(x) \le f(0)$$

$$\frac{\Gamma_q(2)^a}{\Gamma_q(1+a)} \le \frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)} \le \frac{\Gamma_q(1)^a}{\Gamma_q(1)}$$

Karena , $\Gamma_q(1) = \Gamma_q(2) = 1$, maka diperoleh

$$\frac{1}{\Gamma_q(1+a)} \le \frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)} \le 1$$

Jika $q$ = 1, maka (2.1) menjadi (1.2), sedangkan jika $q$ = 1 dan $a$ = $n$ bilangan bulat non negatif, maka (2.1) menjadi (1.1).

Selanjutnya persamaan (2.1) dikembangkan untuk fungsi ) $\Gamma_q(1+ax)$ $dan$ $\Gamma_q(1+bx)$.

*Lemma 2.4*

Jika $0 < q < 1$, $x \ge 0$, $a \ge b$ maka $\Psi_q(1+ax) \ge \Psi_q(1+bx)$

Bukti :

Ambil $f(x) = \dfrac{\Gamma_q(1+bx)^a}{\Gamma_q(1+ax)^b}$ dan

$$g(x) = \ln f(x)$$

$$g(x) = a \ln \Gamma_q(1+bx) - b \ln \Gamma_q(1+ax)$$

$$g'(x) = a \frac{d}{dx} \ln \Gamma_q(1+bx) - b \frac{d}{dx} \ln \Gamma_q(1+ax)$$

$$= ab\Psi_q(1+bx) - ab\Psi_q(1+ax)$$

$$= ab\left[\Psi_q(1+bx) - \Psi_q(1+ax)\right]$$

Karena $a \ge b > 0$ dan berdasarkan teorema 4, maka $g'(x) = ab\left[\Psi_q(1+bx) - \Psi_q(1+ax)\right] \le 0$

Berarti $g'(x)$ fungsi turun atau $f(x)$ fungsi turun.

Karena $f(x) = \dfrac{\Gamma_q(1+bx)^a}{\Gamma_q(1+ax)^b}$ turun pada $x \in [0,1]$, maka

$$f(1) \le f(x) \le f(0)$$

$$\frac{\Gamma_q(1+b)^a}{\Gamma_q(1+a)^b} \le \frac{\Gamma_q(1+bx)^a}{\Gamma_q(1+ax)^b} \le 1 \ \blacksquare$$

## KESIMPULAN

Pada pembahasan di atas ketidaksamaan yang dihasilkan untuk kasus $x \in [0,1]$ dan $a \ge 1$. Persoalan ini masih sangat terbuka bagaimana jika $a \in [0,1]$ dan $x \ge 1$ atau fungsinya diperluas

$$f(x) = \frac{\Gamma_q(r+bx)^a}{\Gamma_q(s+ax)^b}$$

## DAFTAR PUSTAKA


Alsina, C dan Tomas, M.S, 2005, A geometrical proof of a new inequality for the gamma function, *Jipam*, **6**(2)

Askey, R., 1978/79, The q-gamma and q-beta functions, *Applicable Anal*., **8**(2)

Baiduri, 2003, *Kemonotonan Fungsi Gamma*, Laporan Penelitian UMM.

Baiduri, 2008, *Ketidaksamaan Pada Fungsi Gamma*, Makalah Seminar KNM 24 di Unsri. 24 – 27 Juli 2008.

Erdelyi, A, Magnus, W, Oberhettinger, F dan Tricomi, F, 1953, *Higher Trancscendental Functions*, McGraw-Hill Book Company, New York.

Koldobsky, A dan Lifshits, M, 2000, Average volume of section of star bodies, In : Geometric Aspects of Functional Analisys, *Lect. Notes Math.*, **1745**, hal. 119 – 146, Springer, Berlin.

Sandor, Jozsef, 2005, A note certain inequalities for the gamma function, *Jipam*, **6**(3)