

## ANALISIS PERPINDAHAN NON LINIER BALOK BERDASARKAN TEORI ELASTIKA

### *Analysis Displacement Non Linear of Beam Based with Theory of Elastica*

**Anwar Dolu<sup>1</sup> & Amrinsyah Nasution<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Tadulako  
Alamat korespondensi : Jl. Soekarno - Hatta KM. 9, Palu, Sulawesi Tengah, Indonesia  
email: anwardolu@yahoo.com

<sup>2</sup>Jurusan Teknik Sipil FTSL Institut Teknologi Bandung  
Alamat korespondensi : Jl. Ganesha No.10, Jawa Barat 40132  
email: ancedin@bdg.centrin.net.id

#### **Abstract**

*In this study the authors analyze the nonlinear deflection on the cantilever with a load point  $P$  at the end . Analysis nonlinear deflection based on the elastica theory with solving elliptic integrals and method of iterations. For external load ( $P$ ) is small ( $P < 0.70$  unit ) deflection less significant difference ( $\Delta < 5\%$ ). For external load ( $P$ ) increasing ( $P > 0.70$  unit ), the difference is increasing the amount of deflection in significant. Deflection obtained by using the theory elastica smaller than the deflection by linear theory .*

**Keywords :** *Nonlinear deflection , elastica theory , elliptic integrals , method of iterations , MAPLE*

#### **Abstrak**

Dalam kajian ini penulis menganalisis lendutan nonlinier pada tumpuan jepit bebas dengan beban titik  $P$  di ujung. Analisis lendutan nonlinier berdasarkan teori elastika dengan pemecahan integral eliptik dan metode iterasi. Untuk beban luar ( $P$ ) yang kecil ( $P < 0.70$  satuan) perbedaan lendutan kurang signifikan ( $\Delta < 5\%$ ). Untuk beban luar ( $P$ ) yang semakin meningkat ( $P > 0.70$  satuan) maka perbedaan besaran lendutan semakin meningkat secara signifikan. Lendutan yang diperoleh dengan menggunakan teori elastika/nonlinier lebih kecil dibandingkan lendutan dengan berdasarkan pendekatan teori linier.

**Kata kunci:** Lendutan Nonlinier, Teori Elastika, Integral eliptic, Metode Iterasi, MAPLE.

### **PENDAHULUAN**

Perkembangan rekayasa di bidang konstruksi saat ini banyak menerapkan tipe struktur dengan model langsing dan fleksibel sebagai konsekuensi minimasi ukuran struktur, reduksi berat struktur, efisiensi maupun desain aerodinamis. Terapan struktur tersebut meluas diberbagai bidang, misalnya alat-alat olahraga, struktur pesawat dan ruang angkasa, elektronik, atap membran, struktur kabel, kincir angin, struktur lepas pantai (*offshore*), sistem perpipaan (*pipelines*) dan *riser*, kabel tambatan (*mooring*) dan lain sebagainya.

Model struktur yang langsing serta fleksibel tersebut, secara teoritis akan mengalami perpindahan yang besar dan nonlinier. Pendekatan umum untuk permasalahan tersebut berdasarkan

teori Elastika. Penyelesaian analitik teori elastika, berdasarkan Timoshenko (1953) dimulai sejak Bernoulli, Euler, Lagrange. Bisshopp, Drucker (1945) menyelesaikan kasus lendutan pada tumpuan jepit-bebas dengan beban titik ( $P$ ) dalam bentuk integral eliptik. Timoshenko dan Gere (1961) menyelesaikan kasus tekuk pada tumpuan jepit bebas dalam bentuk integral eliptik. Sathyamoorthy (1998), menyelesaikan lendutan besar pada tumpuan jepit-bebas dengan pendekatan deret dan penyelesaian integral eliptik. Belendez, Neipp, Belendez (2002), menyelesaikan masalah lendutan besar pada tumpuan jepit bebas dengan beban titik ( $P$ ) menggunakan integral eliptik dan verifikasi eksperimental. Fertiz (2006), menyelesaikan lendutan pada tumpuan jepit-bebas akibat beban titik ( $P$ ) dan beban merata ( $q$ ) untuk penampang seragam

dan variabel dengan menggunakan metode iterasi berdasar metode integrasi Simpson. Pai (2006) menyelesaikan kasus lendutan pada tumpuan jepit-bebas dengan beban titik (P), beban merata (q) serta beban momen (M). Krenk (2009) menyelesaikannya dengan menggunakan metode elemen hingga.

Dalam kajian ini, Penulis mengkaji perpindahan besar pada tumpuan jepit bebas yang menerima beban titik (P) di ujung bebas, menggunakan metode iterasi Fertiz (2006) dan penyelesaian Integral Eliptik dengan aplikasi software MAPLE ver-18.

**Teori Perpindahan Besar**

Untuk balok fleksibel yang mengalami perpindahan besar (*large deformations*), maka hubungan nonlinier antara momen dan kelengkungan (*moment curvature nonlinearity*) berdasarkan teori Euler-Bernoulli adalah

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

Untuk notasi : putaran sudut ( $\delta$ ), panjang busur (s), lendutan (y), momen lentur (M), modulus elastisitas (E), momen inersia (I).

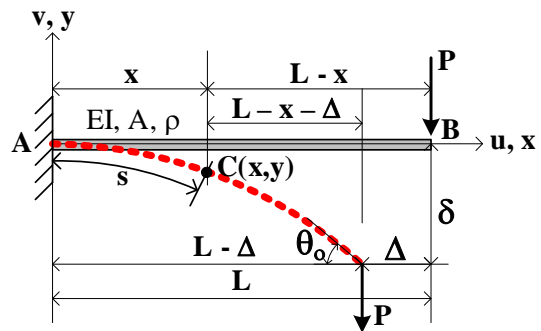
Dalam teori linier, dengan asumsi perpindahan kecil (*small deformations*), maka persamaan (1) menjadi

$$\frac{d\phi}{ds} \cong \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2)$$

Bersadarkan Timoshenko dan Gere (1961), Fertiz (2006), bentuk eksak kurva perpindahan dari balok fleksibel sesuai persamaan (1) disebut *elastica* atau teori elastika (*theory elastica*). Sedangkan persamaan (2) yang digunakan dalam pendekatan teori kekuatan material (*theory strength of materials*).

Dengan meninjau perpindahan pada struktur jepit – bebas yang menerima beban P di ujung bebas titik B (gambar 1), sesuai Bisshopp, Drucker (1945), Frisch-Fai (1962), Belendez, Neipp, Belendez (2002), Fertis (2006), Khavvaji et al (2012), berdasar persamaan (1), dengan diferensial terhadap panjang busur (s):

$$EI \frac{d^2 \phi}{ds^2} = \frac{dM}{ds} \quad (3)$$



Gambar 1. Geometri Balok Jepit – Bebas

**Geometri Balok Jepit – Bebas**

Momen lentur M(s) pada titik C :

$$M(s) = P(L - \Delta - x) \quad (4)$$

Dari persamaan (4), dan menggunakan hubungan  $\cos \phi = dx/ds$ , kemudian disubstitusi ke persamaan (1) maka diperoleh:

$$EI \frac{d^2 \phi}{ds^2} + P \cos \phi = 0 \quad (5)$$

Yang dapat dituliskan

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{2} EI \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 + P \sin \phi \right] = 0 \quad (6)$$

Kondisi batas untuk sudut ( $\phi$ ) diujung bebas

$$\phi(L) = \phi_0 \quad ; \quad \left( \frac{d\phi}{ds} \right)_{s=L} = 0 \quad (7)$$

Sesuai kondisi batas pada persamaan (7), maka dari persamaan (6) diperoleh

$$\left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 = \frac{2}{EI} (P \sin \phi_0 - P \sin \phi) = 0 \quad (8)$$

Dengan integrasi sepanjang busur (s) sebagai fungsi kemiringan ( $\phi$ )

$$s = \sqrt{\frac{EI}{2P}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}} \quad (9)$$

Maka panjang total L yang berhubungan dengan sudut  $\varphi_0$

$$L = \sqrt{\frac{EI}{2P}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}} \quad (10)$$

Untuk perpindahan arah x dan y, sesuai persamaan berikut

$$x = \sqrt{\frac{2EI}{P}} \left[ \frac{\sqrt{\sin \varphi_0}}{-\sqrt{(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}} \right] \quad (11)$$

$$y = \sqrt{\frac{EI}{2P}} \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}} \quad (12)$$

Lendutan pada titik ujung bebas (B) dengan sudut  $\varphi = \varphi_0$ , maka

$$\Delta = L - x(\varphi_0) \quad (13)$$

$$\delta = y(\varphi_0) \quad (14)$$

Dengan parameter non-dimensional

$$\alpha = \frac{PL^2}{EI} \quad (15)$$

$$\xi = \frac{x}{L} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{L} \quad (16)$$

Persamaan (17) mengandung nilai putaran sudut diujung bebas ( $\varphi_0$ ) yang belum diketahui yang merupakan fungsi dari parameter non-dimensional ( $\alpha$ ).

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} - 2\sqrt{\alpha} = 0 \quad (17)$$

Prosedur untuk mencari besarnya perpindahan (D dan d) dengan menyelesaikan persamaan (15,17)

dengan proses iterasi menggunakan software MAPLE ver-18, kemudian diselesaikan persamaan (18,19)

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{\sqrt{\sin \varphi_0}}{-\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} \right) \quad (18)$$

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} d\varphi \quad (19)$$

Sesuai Bisshopp, Drucker (1945), Timoshenko, Gere (1961), Frisch-Fai (1962), dengan menyelesaikannya bentuk integral elliptik (*elliptic integration*) menggunakan software MAPLE ver-18 untuk menyelesaikan proses integral elliptik. Berdasarkan notasi Frisch-Fai (1962), maka defleksi vertikal

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{EI}{P}\right)} \left[ \begin{array}{l} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \varphi}} \\ -2 \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \end{array} \right] \quad (20)$$

Dalam bentuk notasi integral elliptik sesuai Abramowitz dan Stegun (1970)

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{EI}{P}\right)} \left[ \begin{array}{l} K(\rho) - F(\rho, \varphi_1) \\ -2E(\rho) + 2E(\rho, \varphi_1) \end{array} \right] \quad (21)$$

Perpindahan horisontal

$$\Delta = L - \left[ \frac{2EI}{P} (2\rho^2 - 1) \right]^{1/2} \quad (22)$$

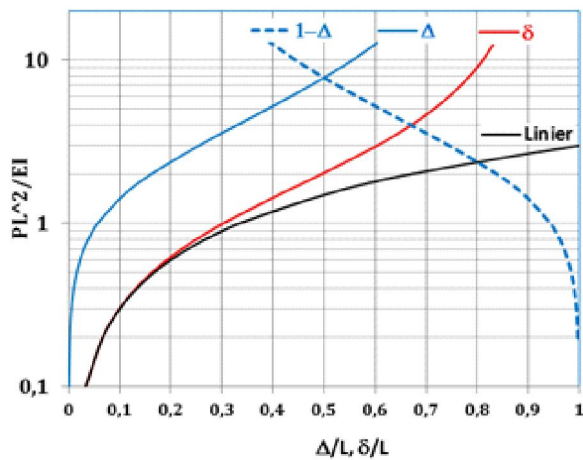
Dimana bentuk integral elliptik dalam notasi software MAPLE ver-18

```
>EllipticK(500P);#complete first kind
>EllipticF(φ1,500P);#incomplete first kind
>EllipticE(500P);#completesecond kind
>EllipticE(φ1,500P);#incomplete second kind
```

Untuk mencari perpindahan pada titik C, sejauh panjang busur (s) dari titik A, dan kemiringan  $\phi_c$ , maka dapat digunakan persamaan(11 dan 12).

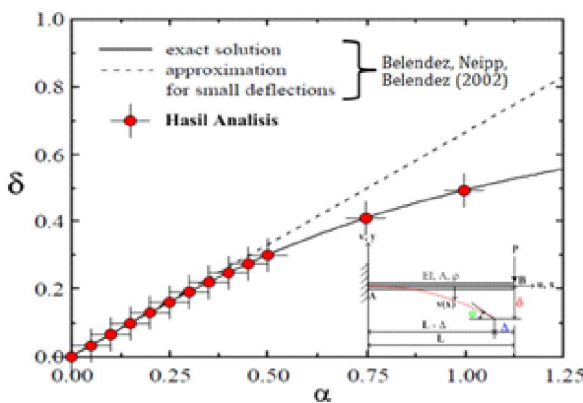
**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Dengan meninjau tumpuan jepit-bebas yang menerima beban terpusat P ujung bebas seperti gambar (1), sesuai Teori Elastika (*Elastica Theory*) pada persamaan (15 – 18) dengan variasi beban P, maka dapat diperoleh lendutan vertikal ( $\delta$ ) dan horisontal ( $\Delta$ ) non-dimensional seperti gambar (2).



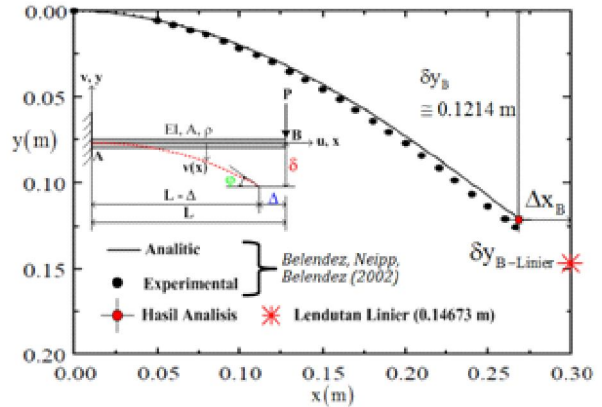
Gambar 2. Grafik Hubungan Beban – Perpindahan

Sesuai Belendez, Neipp, Belendez (2002) untuk verifikasi eksperimental menggunakan pelat baja dengan modulus elastisitas  $E = 200 \text{ GPa}$ , panjang  $L = 300 \text{ mm}$ , lebar  $b = 30.4 \text{ mm}$  dan tinggi  $h = 0.78 \text{ mm}$ , maka secara teoritis diperoleh perpindahan horisontal ( $x = 3.14 \text{ cm}$ ) dan perpindahan vertikal  $\delta y = 12.16 \text{ cm}$ .



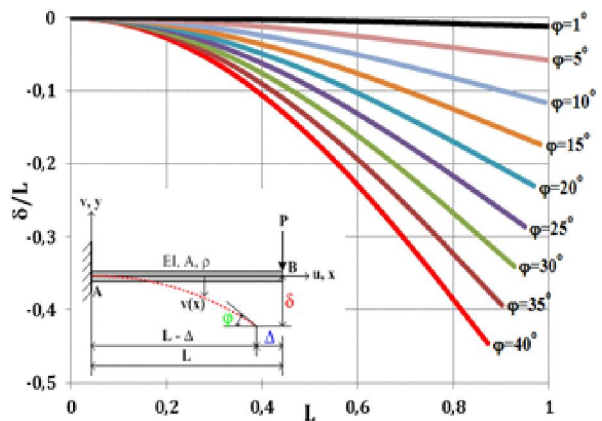
Gambar 3. Hasil analisis dan hasil teoritis Belendez, Neipp, Belendez (2002)

Hasil yang diperoleh Penulis berdasarkan persamaan (18,19 dan 21,22) untuk perpindahan horisontal “ $x = 3.134 \text{ cm}$ , dan perpindahan vertikal  $\delta y = 12.14 \text{ cm}$ , sedangkan perpindahan vertikal untuk kasus linier  $\delta y_{lin} = 14.67 \text{ cm}$  [ $\delta y_{lin} = PL^3/(3EI)$ ].



Gambar 4. Hasil analisis dan hasil eksperimen Belendez, Neipp, Belendez (2002)

Dengan simulasi untuk sudut pada ujung bebas (titik B) ditentukan sebesar  $0^\circ$   $\delta$   $40^\circ$ , sesuai persamaan (11–12), maka dapat diperoleh konfigurasi perpindahan sepanjang bentang (L) seperti gambar (5). Untuk hubungan beban luar (P) dengan putaran sudut pada titik B ( $\phi_0$ ) dengan menggunakan persamaan (15).



Gambar5. Konfigurasi lendutan ( $\delta$ ) dengan variasi putaran sudut titik B ( $\phi$ )

Berdasarkan analisis menggunakan teori elastika (*elastica theory*), maka lendutan yang diperoleh lebih kecil dibandingkan dengan teori linier, perbedaan semakin membesar seiring dengan kenaikan beban luar (P).

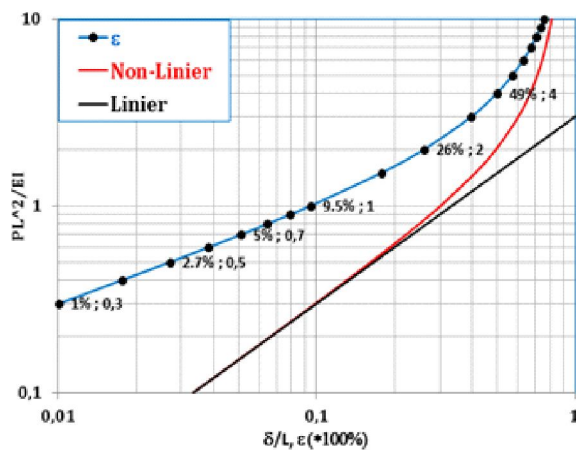
$$\delta_{lin} > \delta_{nonlinier} \quad (23)$$

Terlihat bahwa untuk beban 1 satuan (P=1), maka lendutan berdasar teori linier dan teori nonlinier (elastika) adalah :

$$\frac{\delta_{lin}}{L} = \frac{1}{3} \frac{L^2}{EI} \approx 0.33333 \frac{L^2}{EI}$$

$$\frac{\delta_{nonlin}}{L} \approx 0.30172 \frac{L^2}{EI} \quad (24)$$

Dengan perbedaan (Δ)9,5% lebih kecil lendutan yang diperoleh dengan teori nonlinier dibandingkan dengan teori linier (gambar 6).



Gambar 6. Presentase Perbedaan Lendutan Teori Linier – Teori Nonlinier (Elastika)

Untuk variasi beban luar (P) yang kecil dan prosentase perbedaan lendutan (Δ) seperti gambar 6, dimana lendutan dengan teori linier lebih besar dibandingkan dengan teori elastika (P=0.30, Δ=1% ; P=0.50, Δ=2.7% ; P=0.70, Δ=5%). Selanjutnya dengan penambahan beban yang linier maka pada teori linier juga terjadi peningkatan yang linier terhadap lendutannya, sebaliknya pada teori nonlinier, terjadi peningkatan yang nonlinier pada lendutannya dengan laju peningkatan yang lebih melambat (Gambar 6). Untuk gaya luar semakin besar, misal P=2 satuan, maka terjadi perbedaan (Δ)26 % (lihat gambar 6).

Perbedaan mendasar dari hasil lendutan yang diperoleh antara teori linier dan teori elastika/nonlinier, karena penyederhanaan bentuk nonlinier sesuai persamaan (1) hingga menjadi linier sesuai persamaan (2) dengan asumsi perpindahan kecil (*small deformations*) dengan mengabaikan suku penyebut (denominator) pada persamaan (1) tersebut.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \ll 1 ; \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \approx 1 \quad (25)$$

Pada saat beban yang bekerja kecil, maka perbedaan lendutan tidak signifikan antara teori linier dan nonlinier. Akan tetapi pada saat beban ditambahkan terus menerus, maka laju peningkatan sudut (dy/dx) juga meningkat dengan cepat, konsekwensinya pada suku penyebut nonlinier juga bertambah besar, yang pada akhirnya besaran lendutan pada teori non-linier meningkat dengan laju yang lebih lambat dibanding pada teori linier yang peningkatan lendutan seiring dengan peningkatan beban.

### KESIMPULAN DAN SARAN

Tipe struktur langsing dan fleksibel pada balok jepit-bebas untuk beban luar (P) yang kecil (P< 0.70) perbedaan lendutan kurang signifikan (Δ< 5%). Untuk beban luar (P) yang semakin meningkat (P > 0.70) maka perbedaan besaran lendutan juga semakin meningkat secara signifikan. Dengan teori elastika/nonlinier, lendutan yang diperoleh lebih kecil dibandingkan lendutan dengan teori linier.

Hubungannya dengan aplikasi desain struktur, pendekatan teori linier sangat konservatif (lebih aman), akan tetapi pada teori nonlinier merupakan pendekatan yang lebih realistis dan ekonomis.

### DAFTAR PUSTAKA

Abolfathi, A., Brennan, M.J., Waters, TP. (2010). *Large Deflection of a Simply Supported Beam*. ISVR Technical Memorandum No. 988. Institute of Sound and Vibration Research Dynamics Group, University of Southampton.

Belendez, T., Neipp, C., Belendez, A. (2010). *Large and Small Deflections of a Cantilever Beam*. European Journal of Physics. Vol. 23, No.3 (May 2002), pp.371-379.

Bisshopp, K.E., Drucker, D.C. (1945). *Large Deflections of Cantilever Beam*, Quart. Appl. Math. 272-275.

Khavvaji, A. Pashaei, M. H. Dardel, M. Alashti, R. A. (2012) . *Large Deflection Analysis of Compliant Beams of Variable Thickness and Nonhomogenous Material under Combined*

*Load and Multiple Boundary Conditions.* IJE TRANSACTIONS C: Aspects Vol. 25, No. 4, (December 2012) 353-362.

*Computational Methods.* CRC Press, Boca Raton.

Young, W.C. (1989). *Roarks Formula for Stress and Strain*, Mc. Graw Hill. USA.

Maple User Manual (2014). Copyright © Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc.

## Buku

Abramowitz, M., Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Function, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Tenth printing. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series. USA.

Crisfield, M.A. (1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. I : Essentials.* John Wiley & Sons Ltd. England.

Enns, R.H., McGuire, G. (1997). *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers.* Birkhauser Boston USA

Fertis, D.G. (1999). *Nonlinear Mechanics,* CRC Press. Florida. USA.

Fertis, D.G. (2006). *Nonlinear Structural Engineering.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.

Frisch Fay, R. (1962). *Flexible Bars.* Butterworths & Co, London, Great Britain.

Krenk, S. (2009), *Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures,* Cambridge University Press

Meek, J.L. (1991). *Computer Methods in Structural Analysis.* Chapman & Hall, Australia.

Nayfeh, A.H., Pai, P.F. (2004). *Linear dan Nonlinear Structural Mechanics.* John Wiley & Sons. USA.

Pai, P.F. (2006). *Highly Flexible Structures ; Modeling, Computation, and Experimentation.* AIAA Inc, Reston, Virginia

Pipes, L.A., Harvill, L.R. (1991). *Matematika Terapan untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Edisi ketiga. Gadjah Mada University Press.

Reddy, J.N. (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.* Oxford University Press. New York

Sathyamoorthy, M. (1998). *Nonlinear Analysis of Structures,* USA, CRC Press LLC.

Soare, M.V., Teodorescu, P.P., Toma, I. (2007). *Ordinary Differential Equations with Applications to Mechanics.* Springer, Netherlands.

Wunderlich, W., Pilkey, W.D. (2002). *Mechanics of Structures ; Variational and*